

© International Baccalaureate Organization 2023

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2023

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2023

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

# Mathematik: Analyse und Ansätze

## Grundstufe

### 2. Klausur

31. Oktober 2023

Zone A Nachmittag | Zone B Nachmittag | Zone C Nachmittag

Prüfungsnummer des Kandidaten

1 Stunde 30 Minuten

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

#### Hinweise für die Kandidaten

- Schreiben Sie Ihre Prüfungsnummer in die Felder oben.
- Öffnen Sie diese Prüfungsklausur erst nach Aufforderung.
- Für diese Klausur wird ein grafikfähiger Taschenrechner (GTR) benötigt.
- Teil A: Beantworten Sie alle Fragen. Die Antworten müssen in die dafür vorgesehenen Felder geschrieben werden.
- Teil B: Beantworten Sie alle Fragen im beigefügten Answerheft. Tragen Sie Ihre Prüfungsnummer auf der Vorderseite des Answerhefts ein und heften Sie es mit dieser Prüfungsklausur und Ihrem Deckblatt mit Hilfe der beiliegenden Klammer zusammen.
- Sofern in der Frage nicht anders angegeben, sollten alle numerischen Antworten entweder exakt oder auf drei signifikante Stellen genau angegeben werden.
- Für diese Klausur ist ein unverändertes Exemplar der **Formelsammlung zu Mathematik: Analyse und Ansätze** erforderlich.
- Die Höchstpunktzahl für diese Prüfungsklausur ist **[80 Punkte]**.



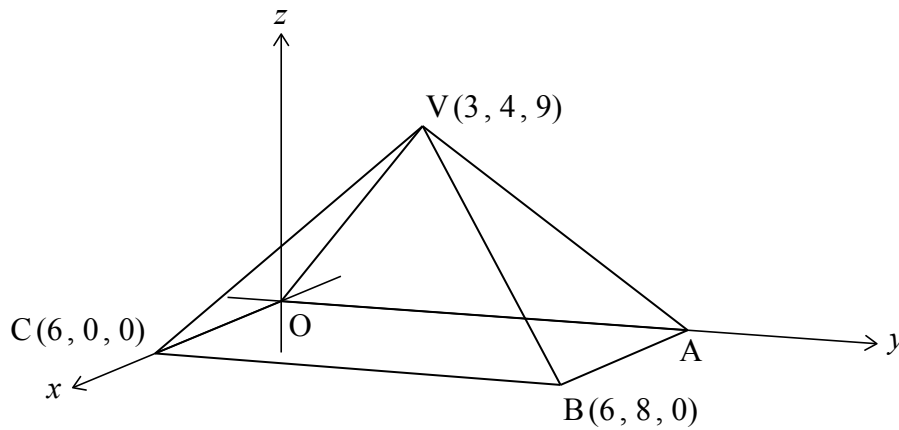


2. [Maximale Punktzahl: 6]

Das folgende Diagramm zeigt eine Pyramide mit dem Scheitelpunkt  $V$  und der rechteckigen Grundfläche  $OABC$ .

Punkt  $B$  hat die Koordinaten  $(6, 8, 0)$ , Punkt  $C$  hat die Koordinaten  $(6, 0, 0)$  und Punkt  $V$  hat die Koordinaten  $(3, 4, 9)$ .

**Zeichnung nicht maßstabsgerecht**



- (a) Finden Sie  $BV$ . [2]
- (b) Finden Sie das Maß von  $\widehat{BVC}$ . [4]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

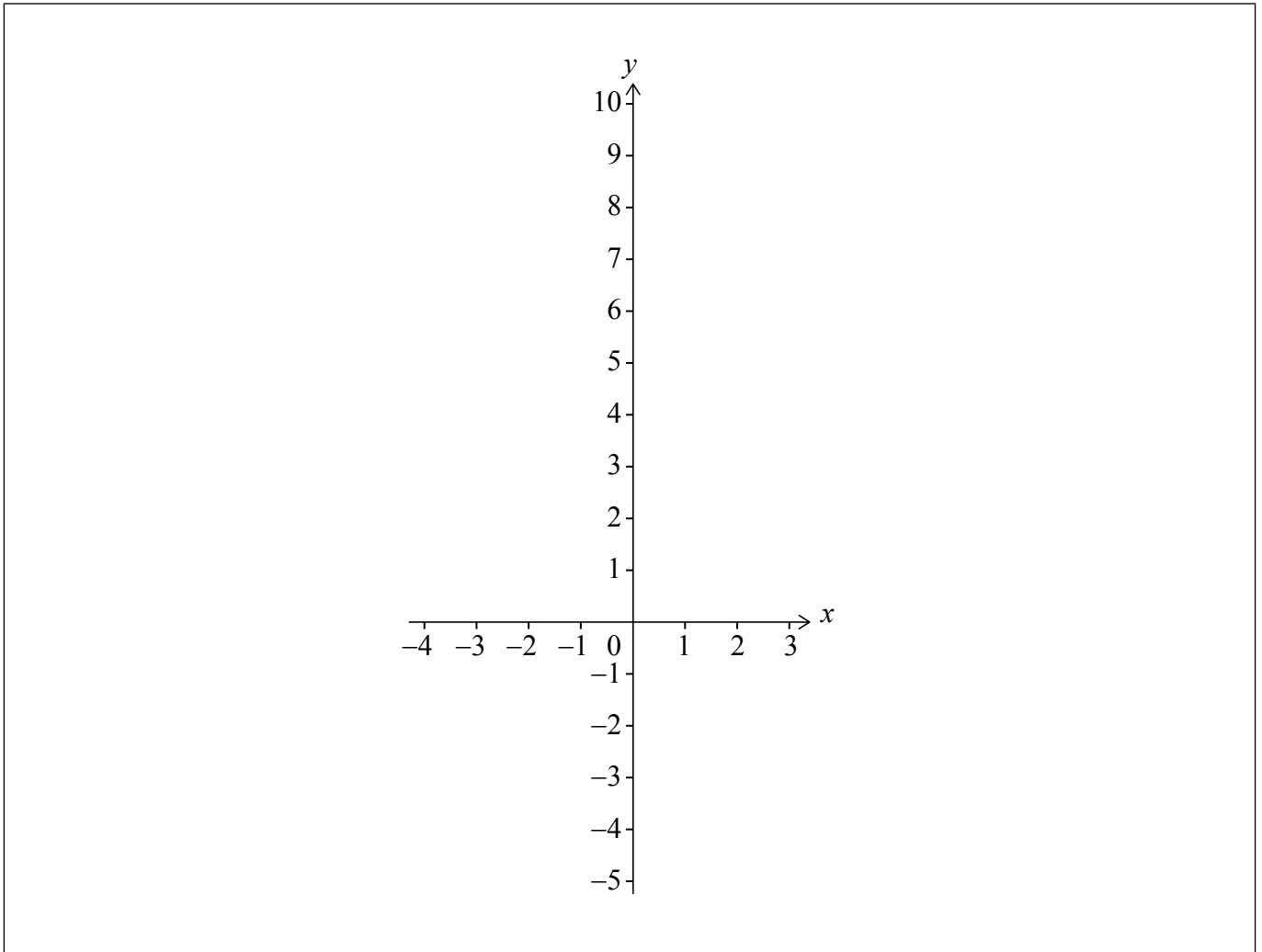
.....



3. [Maximale Punktzahl: 5]

Betrachten Sie die Funktion  $f(x) = e^x - 3x - 4$ .

(a) Skizzieren Sie im folgenden Koordinatensystem den Graphen von  $f$  für  $-4 \leq x \leq 3$ . [3]



Die Funktion  $g$  ist definiert durch  $g(x) = e^{2x} - 6x - 7$ .

(b) Der Graph von  $g$  ergibt sich aus dem Graphen von  $f$  durch eine horizontale Streckung mit dem Streckfaktor  $k$ , gefolgt von einer vertikalen Verschiebung um  $c$  Einheiten.

Finden Sie den Wert von  $k$  und den Wert von  $c$ . [2]

**(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)**



**(Fortsetzung Frage 3)**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

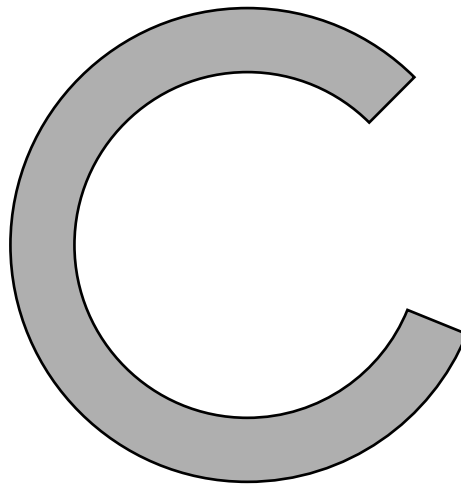


12EP05

**Bitte umblättern**

4. [Maximale Punktzahl: 7]

Ein Unternehmen entwirft ein neues Logo in Form des Buchstabens „C“.



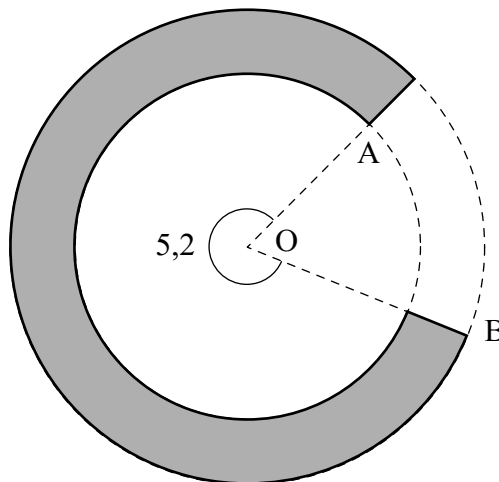
Der Buchstabe „C“ wird zwischen zwei Kreisen mit dem Mittelpunkt  $O$  gebildet.

Punkt  $A$  liegt auf der Kreislinie des inneren Kreises mit dem Radius  $r$  cm, mit  $r < 10$ .

Punkt  $B$  liegt auf der Kreislinie des äußeren Kreises mit dem Radius  $10$  cm.

Der überstumpfe Winkel  $A\hat{O}B$  beträgt  $5,2$  (im Bogenmaß). Der Buchstabe „C“ ist in der folgenden Abbildung durch den schattierten Bereich dargestellt.

**Zeichnung nicht maßstabsgerecht**



(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)



**(Fortsetzung Frage 4)**

(a) Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt des Buchstabens „C“ gegeben ist durch  $260 - 2,6r^2$ . [2]

Der Flächeninhalt des Buchstabens „C“ beträgt  $64 \text{ cm}^2$ .

(b) (i) Finden Sie den Wert von  $r$ .

(ii) Finden Sie den Umfang des Buchstabens „C“. [5]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....





5. [Maximale Punktzahl: 5]

Ein Teilchen bewegt sich entlang einer geraden Linie. Für seine Entfernung  $s$  (in Metern) von einem festen Punkt  $O$  zum Zeitpunkt  $t$  Sekunden gilt:  $s(t) = 4,3 \sin(\sqrt{3t+5})$ , mit  $0 \leq t \leq 10$ .

Das Teilchen kommt zum ersten Mal nach  $q$  Sekunden zur Ruhe.

(a) Finden Sie den Wert von  $q$ . [2]

(b) Finden Sie die Gesamtstrecke, die das Teilchen in den ersten  $q$  Sekunden zurücklegt. [3]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



6. [Maximale Punktzahl: 5]

Die folgende Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer diskreten Zufallsvariablen  $X$ , mit  $a, k \in \mathbb{R}^+$ .

$x$	1	2	3	4
$P(X=x)$	$k$	$k^2$	$a$	$k^3$

Es sei  $E(X) = 2,3$ . Finden Sie den Wert von  $a$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



12EP09

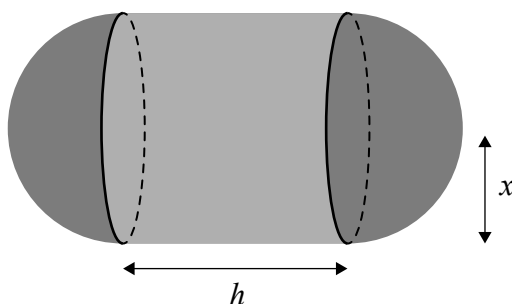
Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

### Teil B

Beantworten Sie **alle** Fragen im beigefügten Antwortheft. Bitte beginnen Sie jede Frage auf einer neuen Seite.

7. [Maximale Punktzahl: 14]

Der im folgenden Diagramm dargestellte Körper besteht aus einem Zylinder und zwei Halbkugeln. Der Zylinder hat die Höhe  $h$  cm und den Radius  $x$  cm. Die Halbkugeln passen genau auf die beiden Enden des Zylinders.



Das Volumen des Zylinders beträgt  $45 \text{ cm}^3$ .

(a) Zeigen Sie, dass die Gesamtoberfläche  $S$  (in  $\text{cm}^2$ ) des Körpers  $S = \frac{90}{x} + 4\pi x^2$  beträgt. [3]

Die Gesamtoberfläche des Körpers besitzt für  $x = a$  ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum.

(b) (i) Finden Sie einen Ausdruck für  $\frac{dS}{dx}$ .  
 (ii) Finden Sie damit den **genauen** Wert von  $a$ . [5]

(c) (i) Finden Sie einen Ausdruck für  $\frac{d^2S}{dx^2}$ .  
 (ii) Begründen Sie mit Hilfe der zweiten Ableitung von  $S$ , dass  $S$  für  $x = a$  ein Minimum besitzt.  
 (iii) Finden Sie die kleinste Oberfläche des Körpers. [6]



Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

8. [Maximale Punktzahl: 15]

**Geben Sie Ihre Antworten auf die Teile (a)(ii), (c)(i) und (d) auf zwei Dezimalstellen genau an.**

Daniela und Sorin haben beide kürzlich etwas Geld erhalten. Daniela hat einen Geldpreis gewonnen und Sorin hat eine Erbschaft erhalten.

Daniela konnte für ihren Gewinn zwischen zwei Möglichkeiten auswählen. In beiden Fällen erhält sie drei Jahre lang am ersten Tag jeden Monats eine Auszahlung.

**Möglichkeit A** Jede Auszahlung beträgt 5500 \$.

**Möglichkeit B** Die erste Auszahlung beträgt 2000 \$. In jedem folgenden Monat beträgt die Auszahlung 6% mehr als im Vormonat.

- (a) Finden Sie den Gesamtbetrag, den Daniela bei der jeweiligen Entscheidung erhalten würde:
- (i) Möglichkeit A;
  - (ii) Möglichkeit B. [5]

Sorin erhielt eine Erbschaft von 120 000 \$. Sorin hat seine Erbschaft auf einem Konto mit einem jährlichen Nominalzinssatz von 4% angelegt. Die Zinsen werden monatlich berechnet und am letzten Tag jedes Monats gutgeschrieben.

- (b) Notieren Sie einen Ausdruck für den Wert von Sorins Anlage nach  $n$  Jahren. [1]

Daniela wählte für ihre Auszahlung Möglichkeit B und erhielt ihre erste Zahlung am 1. Januar 2023. Sorin hat seine Erbschaft am selben Tag angelegt.

- (c) (i) Finden Sie den **Gesamtwert** von Danielas Gewinn und Sorins Geldanlage am letzten Tag des sechsten Monats.
- (ii) Finden Sie die Mindestanzahl vollständiger Monate, bevor der Gesamtwert von Danielas Gewinn und Sorins Geldanlage mindestens 250 000 \$ beträgt. [6]

Am Ende der drei Jahre legt Daniela 40 000 \$ weitere sechs Jahre lang auf einem zweiten Konto mit einem jährlichen Nominalzinssatz von  $r\%$  an, wobei der Zins vierteljährlich gutgeschrieben wird.

- (d) Finden Sie den Wert von  $r$  wenn diese Geldanlage nach sechs Jahren auf 53 000 \$ anwächst. [3]



Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

9. [Maximale Punktzahl: 16]

Ein Landwirt baut auf einem Feld Weizen an. Die Höhe  $H$  (in cm) jeder Weizenpflanze kann durch eine Normalverteilung mit Mittelwert  $\mu$  und Standardabweichung  $\sigma$  modelliert werden.

Es gilt:  $P(H < 94,6) = 0,288$  und  $P(H > 98,1) = 0,434$ .

- (a) Finden Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Höhe einer zufällig ausgewählten Pflanze zwischen 94,6 cm und 98,1 cm liegt. [2]
- (b) Finden Sie die Werte von  $\mu$  und  $\sigma$ . [5]

Der Landwirt misst 100 zufällig ausgewählte Pflanzen. Jede Pflanze mit einer Höhe von mehr als 98,1 cm gilt als erntereif. Die Höhen der Pflanzen sind unabhängig voneinander.

- (c) (i) Finden Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau 34 Pflanzen erntereif sind.
- (ii) Finden Sie unter der Annahme, dass weniger als 49 Pflanzen erntereif sind, die Wahrscheinlichkeit, dass genau 34 Pflanzen erntereif sind. [6]

Auf einem anderen Feld baut der Landwirt die gleiche Weizensorte an, verwendet aber einen anderen Dünger. Die Höhe  $F$  (in cm) dieser Pflanzen ist normalverteilt mit dem Mittelwert 98,6 und der Standardabweichung  $d$ . Der Landwirt stellt den Quartilsabstand 4,82 cm fest.

- (d) Finden Sie den Wert von  $d$ . [3]

